Olimpiada Naţională de Matematică 2007, Piteşti 11 aprilie 2007

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Fie a, b, c, d patru numere naturale nenule, astfel încât ecuaţia

$$x^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1)x + ab + bc + cd + da = 0$$

să aibă o soluţie întreagă. Demonstraţi că şi cealaltă soluţie este număr întreg, iar cele două soluţii sunt pătrate perfecte.

Subiectul 2. Se consideră un triunghi ascuţitunghic ABC şi un punct M diferit de vârfurile triunghiului. Demonstraţi că M este ortocentrul triunghiului dacă şi numai dacă

$$\frac{BC}{MA}\overrightarrow{MA} + \frac{CA}{MB}\overrightarrow{MB} + \frac{AB}{MC}\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}.$$

Subiectul 3. Se împarte planul într-o mulţime infinită de benzi prin drepte paralele echidistante, situate la distanţă 1, iar punctele din interiorul fiecărei benzi se colorează cu roşu sau alb, în fiecare bandă folosindu-se o singură culoare (punctele de pe drepte rămân necolorate). Demonstraţi că există un triunghi echilateral de latură 100, cu vârfurile în puncte de aceeaşi culoare.

Subiectul 4. Pentru o mulţime nevidă A şi o funcţie $f : A \to A$ vom nota

$$f_1(A) = f(A),\ f_2(A) = f(f_1(A)),\ f_3(A) = f(f_2(A)) \ldots$$

şi, în general, $f_n(A) = f(f_{n-1}(A)), \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ (ca de obicei, pentru o mulţime $B \subset A$, notaţia $f(B)$ reprezintă mulţimea $\{f(x) | x \in B\}$ a imaginilor elementelor lui B). Definim

$$f_\infty(A) = f_1(A) \cap f_2(A) \cap f_3(A) \cap \ldots = \bigcap_{n \geq 1} f_n(A).$$

a) Demonstraţi că, dacă A este mulţime finită, atunci $f(f_\infty(A)) = f_\infty(A)$.

b) Precizaţi valabilitatea concluziei precedente pentru

$$A = \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ f((m,n)) = \begin{cases} (m+1, n) & \text{dacă } n \geq m \geq 1 \\ (0,0) & \text{dacă } m > n \\ (0, n+1) & \text{dacă } m = 0\,. \end{cases}$$

Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii